Ejercicio 1A Julio (mod 4) 2021 (Análisis)

Calcula a y b sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot(1-\cos(x))+b\cdot \text{sen}(x)-2(e^x-1)}{x^2}=7$.

Solución

La regla de L'Hôpital (L'H) dice: Si "f" y "g" son funciones continuas en $[a-\delta, a+\delta]$, derivables en $(a-\delta, a+\delta)$, verificando que $f(a)=g(a)=0$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos ∞/∞, y si $x\to\infty$.

Tenemos $7=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot(1-\cos(x))+b\cdot \text{sen}(x)-2(e^x-1)}{x^2}=\left\{\dfrac{a\cdot(1-\cos(0))+b\cdot \text{sen}(0)-2(e^0-1)}{0^2}=\dfrac{0}{0};\ \text{L'H}\right\}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot \text{sen}(x)+b\cdot\cos(x)-2\cdot e^x}{2x}=\dfrac{a\cdot \text{sen}(0)+b\cdot\cos(0)-2\cdot e^0}{2(0)}=\dfrac{b-2}{0}$.

Como me dicen que el límite vale 7, tenemos que seguir aplicándole la Regla de L'Hôpital para lo cual el numerador "b - 2" tiene que ser cero, de donde $b-2=0$, es decir **b = 2.**

Seguimos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot \text{sen}(x)+2\cdot\cos(x)-2\cdot e^x}{2x}=\left\{\dfrac{a\cdot \text{sen}(0)+2\cdot\cos(0)-2\cdot e^0}{2(0)}=\dfrac{2-2}{0}=\dfrac{0}{0};\ \text{L'H}\right\}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot\cos(x)-2\cdot \text{sen}(x)-2\cdot e^x}{2}=\dfrac{a\cdot\cos(0)-2\cdot \text{sen}(0)-2\cdot e^0}{2}=\dfrac{a-2}{2}=7$, de donde tenemos $a-2=2\cdot 7=14$, por tanto resulta **a = 16.**

Ejercicio 2A Julio (mod 4) 2021 (Análisis)

(2'5 puntos) Halla $a>0$ y $b>0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto (1, 2) un punto crítico.

Solución

Sabemos que los puntos críticos anulan la primera derivada f '(x).

$f(x)=\dfrac{bx^2}{1+ax^4}$; $f'(x)=\dfrac{2bx\cdot(1+ax^4)-bx^2\cdot 4ax^3}{(1+ax^4)^2}=\dfrac{2bx+2bax^5-4bax^5}{(1+ax^4)^2}=\dfrac{2bx-2bax^5}{(1+ax^4)^2}$.

De $f'(x)=0$ tenemos $2bx-2bax^5=0$. Como $x=1$ es el punto crítico resulta: $F'(1)=2b-2ba=0=$ $=2b\cdot(1-a)$, de donde $b=0$ y $a=1$. El enunciado dice que $a>0$ y $b>0$, por tanto nos **sólo sirve la solución a = 1.**

Nos dicen que el punto crítico es (1, 2) luego $f(1)=2\to f(1)=\dfrac{b}{1+1}=2$, **por tanto b = 2·2 = 4.**

Ejercicio 3A Julio (mod 4) 2021 (Análisis)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1+\int_0^x te^t\,dt$.

Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

Solución

Tenemos $\int_0^x t\cdot e^t\,dt=\left\{\begin{array}{ll} u=t & \Rightarrow du=dt \\ dv=e^t dt & \Rightarrow v=\int e^t dt=e^t\end{array}\right\}=\left[t\cdot e^t\right]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=\left[t\cdot e^t-e^t\right]_0^x=x\cdot e^x-ex-(0-e^0)=$

$=x\cdot e^x-e^x+1$, por tanto $f(x)=x\cdot e^x-e^x+2$.

Sabemos que la curvatura es el estudio de la segunda derivada f ''(x).

Por el teorema fundamental del calculo integral, $f'(x)=\left(1+\int_0^x te^t\,dt\right)'=0+x\cdot e^x=x\cdot e^x$.

La segunda es f ''(x) = $1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x)$.
De f ''(x) = 0 $\rightarrow$ 1 + x = 0 (e^x siempre es positiva), es decir *x = -1* que será el posible punto de inflexión.

Como f ''(-2) = $e^{-2} \cdot (1 - 2) = -1/(e^2) < 0$**, f es cóncava (∩) en (-∞, -1).**
Como f ''(0) = $e^0 \cdot (1 - 0) = 1 > 0$, **f es convexa (∪) en (-1, +∞).**

Por definición **x = -1 es punto de inflexión y vale f(-1) =** $(-1) \cdot e^{-1} - e^{-1} + 2$ **= -2/e + 2 = (-2+2e)/e ≅ 1'2642.**

Ejercicio 4A Julio (mod 4) 2021 (Análisis)

(2'5 puntos) Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ (para x ≠ -1, x ≠ 1). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (2, 4).

Solución

Tenemos que una primitiva es: $F(x) = \int f(x)dx = \int \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \cdot dx$

Como el numerador es de grado mayor o igual que el denominador tengo que realizar la división entera primero:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +1 & x^2 - 1 \\ \cline{3-3} -x^3 & +1 & 1 \\ \hline & +2 & \end{array}$$

$F(x) = \int \dfrac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int (\text{Cociente})dx + \int \dfrac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}dx = \int (1)dx + \int \dfrac{2}{x^2-1}dx = x + I_1$

$I_1 = \int \dfrac{2}{x^2-1} \cdot dx = \int \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}dx = \int \dfrac{A}{x-1}dx + \int \dfrac{B}{x+1}dx = A \cdot \ln|x-1| + B \cdot \ln|x+1| = \{+++\} = 1 \cdot \ln|x-1| - 1 \cdot \ln|x+1|$

{+++} Calculamos A y B

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A \cdot (x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Igualando numeradores:
2 = A(x+1) + B(x-1). Sustituimos "x" por el valor de las raíces del denominador.
Para x = 1, 2 = A(2) $\rightarrow$ A = 1
Para x = -1, 2 = B(-2) $\rightarrow$ B = -1

Luego $F(x) = \int \dfrac{x^2+1}{x^2-1}dx = x + I_1 = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + K$ **.**

Como F(2) = 4, *4* = 2 + ln(2-1) - ln(2+1) + K = *2 + ln(1) - ln(3) + K*, por tanto K = 2 + ln(3) y **la primitiva que pasa por el punto (2, 4) es F(x) = x + ln|x-1| - ln|x+1| + 2 + ln(3).**

Ejercicio 5B Julio (mod 4) 2021 (Algebra)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. (1'25 puntos)

b) Dada las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$. (1'25 puntos)

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a)
Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}_{F_3+F_2} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= (-1)(-3 + 4) = -1 \neq 0$, luego existe la matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|}$. $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \dfrac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Luego efectivamente $A^2 = -A^{-1}$.

(b)

Dada las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$.

De $A^4X + B = AC$ tenemos $A^4X = AC - B$. Multiplicando la expresión $A^4X = AC - B$ por la izquierda por la matriz $(A^4)^{-1} \rightarrow (A^4)^{-1}\cdot A^4X = (A^4)^{-1}\cdot(AC - B) \rightarrow I\cdot X = (A^4)^{-1}\cdot(AC - B) \rightarrow$ $\mathbf{X = (A^4)^{-1}\cdot(AC - B).}$

Tenemos $(A^4)^{-1} = (A^2\cdot A^2)^{-1} = ((-A^{-1})\cdot(-A^{-1}))^{-1} = ((A^{-1})^2)^{-1} = A^2$.

$$A\cdot C - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $\mathbf{X = (A^4)^{-1}\cdot(AC - B) = X = A^2\cdot(AC - B) =} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6B Julio (mod 4) 2021 (Algebra)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. (1'25 puntos)

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace cada ruta?

Solución

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

(a)

Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. (1'25 puntos)

Sea:

x = número de viajes por la ruta A,

y = número de viajes por la ruta B,

z = número de viajes por la ruta C.

De, "semanalmente hace un total de 70 viajes" $\rightarrow x + y + z = 70$.

De, "el número de viajes por ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C" $\rightarrow y = x + z$.

De, "el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70" $\rightarrow 2x + 2z = 70$.

De $y = x + z$, como $2x + 2z = 70$ tenemos $2y = 70$ luego $\mathbf{y = 35}$ y de $x + 35 + z = 70$ resulta $\mathbf{x + z = 35}$.

Sólo sabemos que el número de viajes por la ruta B es de 35 y que la suma de los viajes de la ruta A y C es también de 35.

(b)
Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace cada ruta?

Tenemos una nueva ecuación 2z = y - 5.

Teniendo en cuenta el apartado (a) resulta **z =** ((35) - 5)/2 **= 30/2 = 15** y entrando en la primera ecuación x + (35) + (15) = 70 de donde **x = 20.**

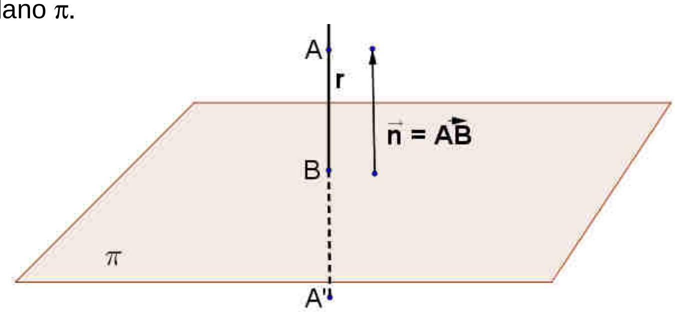
La solución del sistema es (x, y, z) = (20, 35, 15), es decir se realizan 20 viajes por la ruta A, 35 viajes por la ruta B y 15 viajes por la ruta C.

Ejercicio 7 Julio (mod 4) 2021 (Geometría)

La recta perpendicular desde el punto A(1, 1, 0) a un cierto plano π corta a éste en el punto B(1, 1/2, 1/2).
a) Calcula la ecuación del plano π. (1'5 puntos)
b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π (1 punto)

Solución

La recta perpendicular desde el punto A(1, 1, 0) a un cierto plano π corta a éste en el punto B(1, 1/2, 1/2).
(a)
Calcula la ecuación del plano π.



El plano π tiene como vector normal **n = AB** y pasa por el punto B(1, 1/2, 1/2), su ecuación **es**:
$\pi \equiv$ **BX•AB = 0 =** (x - 1, y - 1/2, z - 1/2)•(1-1, 1/2-1, 1/2-0) = (x - 1, y - 1/2, z - 1/2)•(0, -1/2, 1/2) =
= -y/2 + 1/4 + z/2 - 1/4 = -y/2 + z/2 = 0 = -y + z = 0.
(b)
Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.

Debido a la construcción **d(A, A') = 2·d(A, B)** = 2·||**AB**|| = $2\cdot\sqrt{(0)^2+(1/2)^2+(1/2)^2}\ u^1$ =
= $2\cdot(\sqrt{2/4})\ u^1 = \sqrt{2}\ u^1$.

Ejercicio 8 Julio (mod 4) 2021 (Geometría)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s. (1'25 puntos)
b) Halla la recta que corta perpendicular a r y a s. (1'25 puntos)

Solución

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$, con $\mu \in$ R..

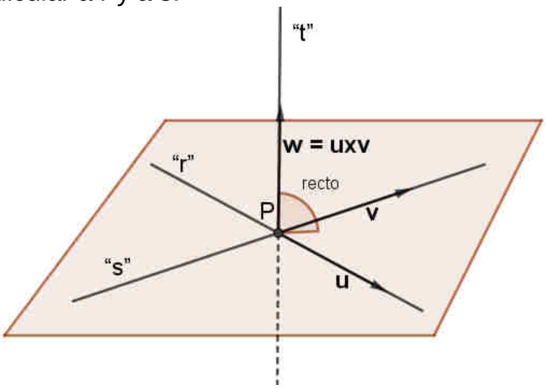
(a)
Estudia la posición relativa de r y s.

De la recta "r" tomamos un punto, el A(3, 1, -3) y un vector director, el **u** = (1, 0, -1)**.**
De la recta "s" tomamos un punto, el B(1, 0, 0) y un vector director, el **v** = (-1, 1, 0)**.**
Como los vectores **u** = (1, 0, -1) de "r" y **v** = (-1, 1, 0) de "s" no son proporcionales, los vectores **u** y **v** no son paralelos, por tanto las rectas "r" y "s" tampoco lo son, luego "r" y "s" se cortan o se cruzan.

Si det(**AB**, **u**, **v**) = 0, “r” y “s” se cortan, con **AB** = **b - a** = (1, 0, 0) - (3, 1, -3) = (-2, -1, 3)
Si det(**AB**, **u**, **v**) ≠ 0, “r” y “s” se cruzan.

Como $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= (-1)\cdot(1 - 0) - 1\cdot(2 - 3)) = -1 + 1 = 0$, luego las rectas **“r” y “s” se cortan en un punto.**

(b)
Halla la recta que corta perpendicular a r y a s.



La recta t que piden tiene por punto P el punto intersección de r y s, y como vector director **w** uno perpendicular a r y s, es decir **w = uxv =** $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(0 + 1) - **j**(0 - 1) + **k**(1 - 0) = (1, 1, 1).

Punto P. Igualamos x = x, y = y, z = z de las rectas r y s. Tenemos $\begin{cases} 3 + \lambda = 1 - \mu \\ 1 = \mu \\ -3 - \lambda = 0 \end{cases}$, de donde $\mu = 1$, $\lambda = -3$ (verifican la primera ecuación) y el punto de corte es P(1 - (1), (1), 0) = P(0, 1, 0).

La recta pedida es: $t \equiv \left.\begin{cases} x = \delta \\ y = 1 + \delta \text{ , con } \delta \in \mathbb{R} \\ z = \delta \end{cases}\right\} \equiv \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{1}$.